赛题新解

2005 年全国联赛加试第二题的另解

徐 一 博

（南开大学 2006 级数学试点班，300070）

题目　设 a、b、c、x、y、$z>0$ 满足

$cy+bz=a$，$az+cx=b$，$bx+ay=c$．

求函数

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}$$

的最小值．

将 x、y、z 用 a、b、c 表示，于是，以 a、b、c 为边长可构成一个锐角 $\triangle ABC$，且

$x=\cos A$，$y=\cos B$，$z=\cos C$．

问题转化为：求

$$f(A,B,C)=\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos C} \quad ①$$

的最小值．

解法 1：猜想 $\angle A=\angle B=\angle C=\frac{\pi}{3}$ 时，$f(A,B,C)=\frac{1}{2}$ 为最小值．

下面用调整法寻找突破口．

设 $\angle B+\angle C=\angle B'+\angle C'$，则

$\angle B'-\angle B=\angle C-\angle C'$．

令 $u=\sin\frac{C+C'}{2}$，$v=\sin\frac{B+B'}{2}$，

$M=(1+\cos B)(1+\cos B')(1+\cos C)(1+\cos C')$．

则 $f(A,B,C)-f(A,B',C')$

$$=(\cos B'-\cos B)\left[\frac{1}{(1+\cos B)(1+\cos B')}-1\right]+$$

$$(\cos C'-\cos C)\left[\frac{1}{(1+\cos C)(1+\cos C')}-1\right]$$

$$=2\sin\frac{B'-B}{2}\left[-\frac{\sin\frac{B+B'}{2}}{(1+\cos B)(1+\cos B')}+\right.$$

$$\frac{\sin\frac{C+C'}{2}}{(1+\cos C)(1+\cos C')}+$$

$$\left.\sin\frac{B+B'}{2}-\sin\frac{C+C'}{2}\right]$$

$$=\frac{2\sin\frac{B'-B}{2}}{M}\left[\sin\frac{C+C'}{2}\left(\cos\frac{B+B'}{2}+\cos\frac{B-B'}{2}\right)^2-\right.$$

$$\sin\frac{B+B'}{2}\left(\cos\frac{C+C'}{2}+\cos\frac{C-C'}{2}\right)^2+$$

$$\left.M\left(\sin\frac{B+B'}{2}-\sin\frac{C+C'}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{2\sin\frac{B'-B}{2}}{M}\left[u(1-v^2)-v(1-u^2)+\right.$$

$$2\cos\frac{B-B'}{2}\left(\sin\frac{C+C'}{2}\cdot\cos\frac{B+B'}{2}-\right.$$

$$\left.\sin\frac{B+B'}{2}\cdot\cos\frac{C+C'}{2}\right)+$$

$$\left.(u-v)\left(\cos^2\frac{B-B'}{2}-M\right)\right]$$

$$=\frac{2\sin\frac{B'-B}{2}}{M}\left[(u-v)\left(1+uv+\cos^2\frac{B-B'}{2}-M\right)+\right.$$

$$\left.2\cos\frac{B-B'}{2}\cdot\sin\frac{C+C'-B-B'}{2}\right]$$

$$=\frac{4\sin\frac{B'-B}{2}\cdot\sin\frac{C+C'-B-B'}{4}}{M}\cdot$$

$$\left[\cos\frac{B+C}{2}\left(1+\sin\frac{B+B'}{2}\cdot\sin\frac{C+C'}{2}+\right.\right.$$

收稿日期：2006-08-16　修回日期：2007-04-03

$$\left.\cos^2\frac{B-B'}{2}-M\right)+$$

$$\left.2\cos\frac{B-B'}{2}\cdot\cos\frac{C+C'-B-B'}{4}\right].\quad ②$$

记 $\cos\frac{B+C}{2}\left(1+\sin\frac{B+B'}{2}\cdot\sin\frac{C+C'}{2}+\right.$

$\left.\cos^2\frac{B-B'}{2}-M\right)+2\cos\frac{B-B'}{2}\cdot\cos\frac{C+C'-B-B'}{4}$

为式③.

要使式②恒不小于 0,对于一种特定调整(如使 $\angle B\leq\angle B'\leq\angle C'\leq\angle C$),$\frac{1}{M}\sin\frac{B'-B}{2}\cdot\sin\frac{C+C'-B-B'}{4}$ 符号不变,此时只要求,当 $\angle B$、$\angle C$ 在特定范围内变动时,式③的符号一定.

由抽屉原理,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 中必有二者在 $[0,\varphi]$ 或 $[\varphi,\frac{\pi}{2}]$ 内.为了运用前面的调整结果,先求出可能的 φ.不妨令 $\angle B=\angle B'=\angle C=\angle C'=\varphi$,并使式③$=0$.则

$$\cos\varphi[1+\sin^2\varphi+1-(1+\cos\varphi)^4]+2=0,$$

$$(\cos\varphi+1)^2(\cos^3\varphi+2\cos^2\varphi+2\cos\varphi-2)=0.$$

所以,$\cos\varphi>\frac{1}{2}$,$\varphi<\frac{\pi}{3}$,且

$$\cos\varphi(1+\cos\varphi)^2=2-\cos\varphi.$$

那么,

(1) 对于 $\angle B$、$\angle C\in[\varphi,\frac{\pi}{2}]$,不妨设 $\varphi\leq\angle B\leq\angle B'=\angle C'\leq\angle C$,则

$$\sin\frac{B'-B}{2}\cdot\sin\frac{C+C'-B-B'}{4}\geq 0.$$

对于式③,若

$$1+\sin\frac{B+B'}{2}\cdot\sin\frac{C+C'}{2}+\cos^2\frac{B-B'}{2}-M\geq 0,$$

则式③≥ 0 显然成立.

否则,令 $t=\cos\frac{B-B'}{2}\in[0,1]$.于是,

式③$\geq\cos\varphi[1+\sin^2\varphi+\cos^2\frac{B-B'}{2}-$

$$(\cos\frac{C+C'}{2}+\cos\frac{B-B'}{2})^2\cdot$$

$$(\cos\frac{B+B'}{2}+\cos\frac{B-B'}{2})^2]+$$

$$2\cos^2\frac{B-B'}{2}$$

$$\geq\cos\varphi(1+\sin^2\varphi)+(\cos\varphi+2)t^2-$$

$$\cos\varphi(\cos\varphi+t)^4$$

$$=y(t).$$

求导可知 $y(t)$ 在 $[0,1]$ 上递减.则

式③$\geq\cos\varphi[2+\sin^2\varphi-(1+\cos\varphi)^4]+2=0$.

故式②≥ 0,

$$f(A,B,C)\geq f\left(A,\frac{\pi-A}{2},\frac{\pi-A}{2}\right)\geq\frac{1}{2}.$$

(2) 对于 $\angle B$、$\angle C\in[0,\varphi]$,不妨设 $\angle B\geq\angle C$,$\angle B'=\varphi$,$\angle C'=\angle B+\angle C-\varphi$.则

$$\sin\frac{B'-B}{2}\cdot\sin\frac{C+C'-B-B'}{4}\leq 0,$$

且 $1+\sin\frac{C+C'}{2}\cdot\sin\frac{B+B'}{2}+\cos^2\frac{B-B'}{2}-M$

$$<3-(1+\frac{1}{2})^4<0.$$

故式③$\leq\cos\varphi[1+\frac{1}{2}\cos(B-C)-$

$$\frac{1}{2}\cos(B+C)+1-(1+\cos\varphi)^4]+2$$

$$\leq\cos\varphi[2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi-(1+\cos\varphi)^4]+2$$

$$=0.$$

于是,式②≥ 0,

$$f(A,B,C)\geq f(A,\varphi,\pi-A-\varphi)$$

$$\geq f(\frac{\pi-C'}{2},\frac{\pi-C'}{2},C')\geq\frac{1}{2},$$

其中,$\angle C'=\pi-\angle A-\varphi$,以上借用了(1).

综上,式①的最小值为 $\frac{1}{2}$.

解法 2:先证明一个引理.

引理 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上连续严格上凸函数,则 $F(x_1,x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ 的最值为

$$F_{\max}=2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

$$F_{\min}=f(a)+f(x_1+x_2-a)$$

或 $F_{\min}=f(b)+f(x_1+x_2-b)$.

其中,x_1+x_2 为定值.

引理的证明:当 $a<x_1\leq x_2<b$ 时,对 $\varepsilon>0$ 充分小,有

$$F(x_1-\varepsilon,x_2+\varepsilon)-F(x_1,x_2)$$
$$=f(x_1-\varepsilon)+f(x_2+\varepsilon)-f(x_1)-f(x_2).$$

令 $x_1'=x_1-\varepsilon$, $x_2'=x_2+\varepsilon$, $h=x_2-x_1\geq 0$. 存在 $\lambda=\frac{\varepsilon}{\varepsilon+h}\in[0,1]$, 使

$$x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2',x_1=\lambda x_2+(1-\lambda)x_1',$$

其中, $\lambda\neq 0$.

当 $\lambda=1$, 即 $x_1=x_2$ 时, 由 $f(x)$ 上凸, 有

$$2f(x_1)>f(x_1')+f(x_2').$$

则 $F(x_1',x_2')<F(x_1,x_2)$.

对 $\lambda\in(0,1)$, 由 $f(x)$ 上凸, 有

$$f(x_2)=f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2')$$
$$>\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2'),$$
$$f(x_1)=f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1')$$
$$>\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1'),$$

则 $f(x_1)+f(x_2)>f(x_1')+f(x_2')$, 即 $F(x_1',x_2')<F(x_1,x_2)$.

所以, $F_{\min}$ 为 $f(a)+f(x_1+x_2-a)$ 与 $f(b)+f(x_1+x_2-b)$ 中有意义的一个, 而 $F_{\max}$ 为琴生不等式结果.

下面证明原题.

对 $g(x)=\frac{\cos^2 x}{1+\cos x}$ 求二次导后发现, $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内先严格上凸后严格下凸, 分界角为 ϕ. 而 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 中必有二角在 $[0,\phi]$ 或 $[\phi,\frac{\pi}{2}]$ 内.

(1) 若 $\angle B=\angle C=\frac{\pi-\angle A}{2}$, 则

$$f(A,B,C)=f(A,\frac{\pi-A}{2},\frac{\pi-A}{2})$$

为关于 $\angle A$ 的一元函数, 此时, 易得

$$f(A,\frac{\pi-A}{2},\frac{\pi-A}{2})\geq\frac{1}{2},$$

仅在 $\angle A=\frac{\pi}{3}$ 时取;

(2) 若 $\angle B$、$\angle C\in[\phi,\frac{\pi}{2}]$, 由琴生不等式得

$$f(A,B,C)\geq f(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2})$$
$$=f(A,\frac{\pi-A}{2},\frac{\pi-A}{2})\geq\frac{1}{2};$$

(3) 若 $\angle B\geq\angle C$ 在 $[0,\phi]$ 内, 由引理与 (2) 知

$$f(A,B,C)\geq f(A,\phi,\pi-A-\phi)$$
$$\geq f(\frac{\pi-C'}{2},\frac{\pi-C'}{2},C')\geq\frac{1}{2},$$

其中, $\angle C'=\pi-\angle A-\phi$.

综上知 $f(A,B,C)_{\min}=f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$.

编者注: 此文中的解法 2 是我们收到的最早的正确解法.

敬 告 读 者

1. 由《中等数学》编辑部编辑的《2005—2006 国内外数学竞赛套题及精解》正在发售。定价:18 元, 单本订阅:23 元(含邮挂费), 11 本以上不收邮费, 41 本以上请直接与编辑部联系。

2.《中等数学》2007 年第 6 期是针对全国高中数学联赛出版的训练题专集, 每本定价 3 元, 邮寄加收 30 %, 欢迎订阅。

3. 现在编辑部有 2007 年合订本上册与部分 2005、2006 年合订本下册, 每册 27 元(含邮挂费)。

地址:天津市河西区卫津路 241 号《中等数学》编辑部
电话:022 - 23542233　　　　邮编:300074

本刊编辑部